第28卷 第3期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 3
2011年06月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　June 2011

文章编号:1005-3085(2011)03-0354-11

时滞Rayleigh方程的反周期解存在性*

周见文， 李永昆， 王艳宁

(云南大学数学系，昆明 650091)

摘　要: 本文利用不动点理论中的Leray-Schauder度定理，研究了一类时滞Rayleigh方程反周期解的存在性问题. 文中给出了保证反周期解存在的充分条件，并举例说明所给条件的合理性和广泛性.

关键词: Rayleigh方程；时滞；反周期解；Leray-Schauder度

分类号: **AMS**(2000) 34B15　　**中图分类号**: O175.14　　**文献标识码**: A

1　引言

近几年，非线性微分方程反周期问题引起了许多研究者的广泛关注[1-4]. 例如，反周期三角多项式是研究插值问题的重要工具[5]，文献[6]研究了反周期小波问题. 最近，文献[7,8]考虑了Schrödinger微分算子和Hill微分算子反周期边值问题，文献[9]考虑了一类二阶微分方程反周期边值问题解的存在性，文献[10]研究了高阶微分方程反周期解的存在性和唯一性，文献[11]研究了差分方程的反周期解. 特别地，文献[12]用Leray-Schauder度理论研究了如下Rayleigh方程的反周期解

$$x''(t)+f\big(t,x'(t)\big)+g\big(t,x(t)\big)=e(t), \tag{1}$$

其中$e:R\to R$和$f,\,g:R\times R\to R$连续，e是T周期的，f和g关于第一变元是T周期的.

由于在诸如物理、机械和工程技术等领域中，许多数学模型涉及到Rayleigh方程或Rayleigh系统，所以其动态行为被广泛研究[12,13]. 而在这些模型中，许多Rayleigh方程或Rayleigh系统具有时滞，重要的是找到这些Rayleigh方程或Rayleigh系统的周期解或反周期解. 然而，目前关于时滞Rayleigh方程或Rayleigh系统的反周期解存在性的结果并不多见.

受上述研究工作的启发，本文研究如下时滞Rayleigh方程反周期解的存在性

$$x''(t)+f\big(t,x'(t)\big)+g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)=e(t), \tag{2}$$

其中$f,\,g\in C(R\times R,R)$, $\sigma,\,e\in C(R,R)$满足以下条件:

(H)　对任意$t,x\in R$，有

$$f(t+T,-x)=-f(t,x),\quad g(t+T,-x)=-g(t,x),\quad e(t+T)=-e(t),\quad \sigma(t+T)=\sigma(t),$$

且

$$\int_0^{2T}e(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

本文给出方程(2)的一些反周期解存在性的充分条件，这些结果与以上参考文献的结果不同，是文献[12]的推广.

收稿日期: 2008-12-31.　**作者简介**: 周见文(1981年3月生)，男，博士. 研究方向：微分方程.

***基金项目**: 云南大学第三批“中青年骨干教师培养计划”项目(21132014).

2 预备知识

在本节中，我们将给出一些相关的定义、定理和引理.

设$u: R\to R$连续，$u(t)$称为在R上是T-反周期的，如果

$$u(t+2T)=u(t),\quad u(t+T)=-u(t),\quad \forall\, t\in R.$$

为了应用Leray-Schauder度定理，我们令

$$C_{2T}^{k,1}=\big\{x\in C^k(R,R),\, x(t+T)=-x(t),\, \forall\, t\in R\big\},\quad k=0,1,2,$$

并赋予其范数$\|\cdot\|$

$$\|x\|=\max\big\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty,\cdots,\|x^{(k)}\|_\infty\big\},$$

其中$\|x\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,2T]}|x(t)|$，则$C_{2T}^{k,1}$是Banach空间，记

$$\|x\|_p=\Big(\int_0^{2T}|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{p}},\quad p\geq 1.$$

我们证明如下引理.

引理1 若$x\in C_{2T}^{k,1}$，则$\|x\|_\infty\leq\frac{1}{2}\|x'\|_1$.

证明 因为$x\in C_{2T}^{k,1}$，故

$$\int_0^{2T}x(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T}x(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{2T}x(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T}x(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{T}x(t+T)\,\mathrm{d}t=0,\tag{3}$$

因此，由(3)式，存在常数$\xi\in[0,2T]$，使得$x(\xi)=0$. 所以

$$|x(t)|=\Big|x(\xi)+\int_\xi^t x'(s)\,\mathrm{d}s\Big|\leq\int_\xi^t|x'(s)|\,\mathrm{d}s,\quad t\in[\xi,\xi+2T],\tag{4}$$

且

$$|x(t)|=|x(t-2T)|=\Big|x(\xi)-\int_{t-2T}^{\xi}x'(s)\,\mathrm{d}s\Big|\leq\int_{t-2T}^{\xi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s,\quad t\in[\xi,\xi+2T].\tag{5}$$

结合(4)和(5)，得

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty&=\max_{t\in[0,2T]}|x(t)|=\max_{t\in[\xi,\xi+2T]}|x(t)|\\&\leq\max_{t\in[\xi,\xi+2T]}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\int_\xi^t|x'(s)|\,\mathrm{d}s+\int_{t-2T}^{\xi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\Big)\Big\}\\&=\max_{t\in[\xi,\xi+2T]}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\int_{\xi-2T}^{t-2T}|x'(s)|\mathrm{d}s+\int_{t-2T}^{\xi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\Big)\Big\}\\&=\max_{t\in[\xi,\xi+2T]}\Big\{\frac{1}{2}\int_{\xi-2T}^{\xi}|x'(s)|\,\mathrm{d}s\Big\}\leq\frac{1}{2}\|x'\|_1.\end{aligned}\tag{6}$$

为了证明本文的主要结果，我们引入著名的Leray-Schauder度定理.

定理1[14] 设Ω是实Banach空间X的有界开子集，并设$\widehat{f}$是$\overline{\Omega}$上的全连续场. 若

$$\deg(\widehat{f},\Omega,p)\neq 0,$$

则$\widehat{f}(x)=p$在Ω内至少有一个解.

3 主要结果

定理2 设 (H) 成立，且存在 $m_2 > m_1 \geq 0$, k, $d > 0$，满足 $4T(m_1 + Tm_2) < 1$，使得

1) $|f(t,x)| \leq m_1|x| + k$, $\forall\, t \in R$, $x \in R$;

2) $g(t,x)x \geq 0$, $\forall\, t \in R$, $|x| > d$;

3) $\limsup\limits_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq m_2$，对 $t \in R$ 一致成立;

则方程 (2) 至少有一个 T-反周期解.

证明 对 $\lambda \in (0,1]$，考虑方程系

$$x''(t) + \lambda f\big(t, x'(t)\big) + \lambda g\big(t, x(t-\sigma(t))\big) - \lambda e(t) = x''(t) + \lambda A\big(t, x(t-\sigma(t)), x'(t)\big) = 0. \tag{7}$$

首先我们估计方程系 (7) 解的先验界. 设 $x \in C_{2T}^{1,1}$ 为方程 (7) 的任意一个 T-反周期解，对 (7) 式两边在 $[0,2T]$ 上积分，有

$$\int_0^{2T} \Big(f\big(t, x'(t)\big) + g\big(t, x(t-\sigma(t))\big)\Big)\,\mathrm{d}t = 0,$$

即

$$\int_0^{2T} f\big(t, x'(t)\big)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{2T} g\big(t, x(t-\sigma(t))\big)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

由条件 (3)，对

$$\epsilon = \frac{1 - 4T(m_1 + Tm_2)}{8T^2},$$

存在 $c > d$，使得

$$g(t,x) > (m_2 + \epsilon)x, \quad \forall\, t \in R, \quad x < -c. \tag{9}$$

记

$$E_1 = \big\{t \in [0,2T] : x(t-\sigma(t)) > c\big\}, \quad E_2 = \big\{t \in [0,2T] : |x(t-\sigma(t))| \leq c\big\},$$
$$E_3 = \big\{t \in [0,2T] : x(t-\sigma(t)) < -c\big\}.$$

当 $E_1 \neq \emptyset$，由 (8) 式得

$$\begin{aligned}\int_{E_1} \big|g\big(t, x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t &= \int_{E_1} g\big(t, x(t-\sigma(t))\big)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{2T} \big|f\big(t, x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t + \int_{E_2 \bigcup E_3} \big|g\big(t, x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

从而由 (7) 式，得

$$\int_0^{2T} |x''(t)|\,\mathrm{d}t \leq 2\int_0^{2T} \big|f\big(t, x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t + 2\int_{E_2 \bigcup E_3} \big|g\big(t, x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t + \|e\|_1. \tag{10}$$

当 $E_1=\emptyset$ 时，得

$$\int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\le\int_0^{2T}\big|f\big(t,x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+\int_{E_2\bigcup E_3}\big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t+\|e\|_1, \tag{11}$$

由 (10) 和 (11)，知

$$\int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\le 2\int_0^{2T}\big|f\big(t,x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+2\int_{E_2\bigcup E_3}\big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t+\|e\|_1. \tag{12}$$

情形 1　$E_2\neq\emptyset$.

由于 $x\in C_{2T}^{1,1}$，故存在 $t_0\in[0,2T)$，使得 $x'(t_0)=0$，因此由式 (12)，得

$$\begin{aligned}|x'(t)|\ &\le\ |x'(t_0)|+\int_{t_0}^{t}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\le\int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\le\ 2\int_0^{2T}\big|f\big(t,x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+2\int_{E_2\bigcup E_3}\big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t+\|e\|_1.\end{aligned} \tag{13}$$

另一方面，由条件 (1) 及引理 1 知

$$\int_0^{2T}\big|f\big(t,x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t\le m_1\int_0^{2T}|x'(t)|\,\mathrm{d}t+2Tk=m_1\|x'\|_1+2Tk, \tag{14}$$

$$\int_{E_2}\big|g(t,x(t-\sigma(t)))\big|\,\mathrm{d}t\le 2T\bar{g}, \tag{15}$$

其中 $\bar{g}=\max\{|g(t,x)|:t\in[0,2T],|x|\le c\}$，又

$$\begin{aligned}\int_{E_3}\big|g(t,x(t-\sigma(t)))\big|\,\mathrm{d}t\ &\le\ \int_{E_3}(m_2+\epsilon)\big|x(t-\sigma(t))\big|\,\mathrm{d}t\\ &\le\ 2T(m_2+\epsilon)\|x\|_\infty\le T(m_2+\epsilon)\|x'\|_1.\end{aligned} \tag{16}$$

从而由 (13)-(16) 导出

$$\begin{aligned}|x'(t)|\ &\le\ \int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\le\ 2\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)\|x'\|_1+4Tk+4T\bar{g}+\|e\|_1,\end{aligned} \tag{17}$$

因此

$$\|x'\|_1\le 4T\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)\|x'\|_1+8T^2k+8T^2\bar{g}+2T\|e\|_1,$$

即

$$\|x'\|_1\le\frac{8T^2k+8T^2\bar{g}+2T\|e\|_1}{1-4T\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)}=M_0>0. \tag{18}$$

由引理 1 及式 (17) 和 (18) 知，存在 M_1, $M_2>0$，使得

$$\|x\|_\infty\le\frac{1}{2}M_0=M_1,\quad \|x'\|_\infty\le 2\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)M_0+4Tk+4T\bar{g}+\|e\|_1=M_2.$$

情形2 $E_2=\emptyset$.

由 $x(t-\sigma(t))$ 的连续性知 $E_1\neq\emptyset$, $E_3=\emptyset$，或者 $E_1=\emptyset$, $E_3\neq\emptyset$.

当 $E_1\neq\emptyset$, $E_3=\emptyset$ 时，由于 $E_2\bigcup E_3=\emptyset$，由条件 (1) 及式 (10) 得

$$|x'(t)|\leq\int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leq 2\int_0^{2T}\big|f\big(t,x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+\|e\|_1\leq 2m_1\|x'\|_1+4Tk+\|e\|_1, \tag{19}$$

即

$$\|x'\|_1\leq 4Tm_1\|x'\|_1+8T^2k+2T\|e\|_1,$$

亦即

$$\|x'\|_1\leq\frac{8T^2k+2T\|e\|_1}{1-4Tm_1}=M_3>0.$$

由引理1及 (19) 式知，存在 M_4, $M_5>0$，使得

$$\|x\|_\infty\leq\frac{1}{2}\|x'\|_1\leq\frac{1}{2}M_3=M_4,\quad \|x'\|_\infty\leq 2m_1M_3+4Tk+\|e\|_1=M_5.$$

当 $E_1=\emptyset$, $E_3\neq\emptyset$，由 (11) 得

$$\begin{aligned}\int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^{2T}\big|f\big(t,x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+\int_{E_3}\big|g(t,x(t-\sigma(t)))\big|\,\mathrm{d}t+\|e\|_1\\ &\leq m_1\|x'\|_1+2Tk+2T(m_2+\epsilon)\|x\|_\infty+\|e\|_1\\ &\leq \big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)\|x'\|_1+2Tk+\|e\|_1,\end{aligned} \tag{20}$$

而 $x\in C_{2T}^{1,1}$，因此存在 $t_1\in[0,2T)$，使得 $x'(t_1)=0$，从而由上式知

$$\begin{aligned}|x'(t)| &\leq |x'(t_1)|+\int_{t_1}^{t}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leq \int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leq\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)\|x'\|_1+2Tk+\|e\|_1.\end{aligned} \tag{21}$$

于是有

$$\|x'\|_1\leq 2T\int_0^{2T}|x''(t)|\,\mathrm{d}t\leq 2T\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)\|x'\|_1+4T^2k+2T\|e\|_1,$$

即

$$\|x'\|_1\leq\frac{4T^2k+2T\|e\|_1}{1-2T\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)}=M_6>0.$$

由引理1及 (21) 式知，存在 M_7, $M_8>0$，使得

$$\|x\|_\infty\leq\frac{1}{2}\|x'\|_1\leq\frac{1}{2}M_6=M_7,\quad \|x'\|_\infty\leq\big(m_1+T(m_2+\epsilon)\big)M_6+2Tk+\|p\|_1=M_8,$$

因此

$$\|x\|=\max\big\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\big\}<\max\big\{M_1,M_2,M_4,M_5,M_7,M_8\big\}+1=M.$$

令

$$\Omega=\big\{x\in C_{2T}^{1,1}:\|x\|<M\big\},$$

则方程 (7) 在 $\partial\Omega$ 上没有 T-反周期解.

若 $x \in C_{2T}^{k,1}\,(k=0,1,2)$，则其有傅里叶展式

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\Big(a_{2i+1}\cos\frac{\pi(2i+1)t}{T}+b_{2i+1}\sin\frac{\pi(2i+1)t}{T}\Big).$$

定义算子 $L: C_{2T}^{k,1}\to C_{2T}^{k+1,1}\,(k=0,1)$ 如下

$$\begin{aligned}(Lx)(t) &= \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s-\frac{T}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_{2i+1}}{2i+1}\\ &= \frac{T}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{a_{2i+1}}{2i+1}\sin\frac{\pi(2i+1)t}{T}-\frac{b_{2i+1}}{2i+1}\cos\frac{\pi(2i+1)t}{T}\Big),\end{aligned}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Lx)(t)=x(t), \tag{22}$$

且

$$\begin{aligned}|(Lx)(t)| &\le \int_0^{2T}|x(s)|\,\mathrm{d}s+\frac{T}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|b_{2i+1}|}{2i+1}\\ &\le 2T\|x\|+\frac{T}{\pi}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}b_{2i+1}^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

应用

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}\Big)^{\frac12}=\frac{\pi}{2\sqrt2}$$

和 Parseval 恒等式

$$\int_0^{2T}|x(s)|^2\,\mathrm{d}s=T\sum_{i=0}^{\infty}\Big(a_{2i+1}^2+b_{2i+1}^2\Big),$$

知：对任意的 $t\in[0,2T]$，有

$$\begin{aligned}|(Lx)(t)| &\le 2T\|x\|+\frac{T}{2\sqrt2}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(a_{2i+1}^2+b_{2i+1}^2)\Big)^{\frac12}\\ &= 2T\|x\|+\frac{T}{2\sqrt2}\Big(\frac1T\int_0^{2T}|x(s)|^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\le\Big(2T+\frac{T}{2}\Big)\|x\|.\end{aligned}$$

结合式 (22) 得

$$\|Lx\|\le\max\Big\{1,\,2T+\frac{T}{2}\Big\}\|x\|,$$

因此，L 连续.

对任意的 $x\in C_{2T}^{k,1}\,(k=0,1,2)$，由条件 (H)，有

$$A\big(t+T,\,x\big(t+T-\sigma(t+T)\big),x'(t+T)\big)=-A\big(t,x(t-\sigma(t)),x'(t)\big),$$

故 $A \in C_{2T}^{0,1}$. 定义 $F_\lambda : \overline{\Omega} \to C_{2T}^{2,1} \subset C_{2T}^{1,1}$ 如下

$$F_\lambda(x) = \lambda L\big(L(-A(x))\big) = \lambda L^2\big(-A(x)\big), \quad \lambda \in [0,1].$$

由 Arzela-Ascoli 定理知 F_λ 全连续，并且 F_1 在 $\overline{\Omega}$ 上的不动点就是方程 (2) 的 T 反-周期解.

定义如下同伦

$$H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to C_{2T}^{1,1}, \quad H(\lambda, x) = x - F_\lambda(x).$$

由以上讨论知，对任意的 $\lambda \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$，有 $H(\lambda, x) \neq 0$，从而由 Leray-Schauder 度的同伦不变性知

$$\deg\{I - F_1, \Omega, 0\} = \deg\{I, \Omega, 0\} \neq 0.$$

因此，由定理 1 知 $x - F_1(x) = 0$ 在 Ω 内至少有一解，即 F_1 在 $\overline{\Omega}$ 上至少有一个不动点. 从而，方程 (2) 有一个 T 反-周期解. **证毕**

同理可得如下定理.

定理 3 设 (H) 成立，且存在 $m_2 > m_1 \geq 0$, k, $d > 0$ 满足 $4T(m_1 + Tm_2) < 1$，使得

1) $|f(t,x)| \leq m_1|x| + k$, $\forall\, t \in R$, $x \in R$;

2) $g(t,x)x \geq 0$, $\forall\, t \in R$, $|x| > d$;

3$'$) $\limsup\limits_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq m_2$，对 $t \in R$ 一致成立;

则方程 (2) 至少有一个 T-反周期解.

定理 2 和定理 3 中的条件 (2) 可用极限形式代替，得如下定理.

定理 4 设 (H) 成立，且存在 $m_2 > m_1 \geq 0$, $k > 0$ 满足 $4T(m_1 + Tm_2) < 1$，使得

1) $|f(t,x)| \leq m_1|x| + k$, $\forall\, t \in R$, $x \in R$;

3$''$) $\limsup\limits_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq m_2$, $\liminf\limits_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} > m_1$, $\liminf\limits_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} > m_1$，对 $t \in R$ 一致成立，或者 $\limsup\limits_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq m_2$, $\liminf\limits_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} > m_1$, $\liminf\limits_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} > m_1$，对 $t \in R$ 一致成立;

则方程 (2) 至少有一个 T-反周期解.

证明 由于

$$\liminf_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} > m_1, \quad \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} > m_1,$$

对 $t \in R$ 一致成立，故存在 $d_1 > 0$，使得

$$g(t,x)\mathrm{sign}x > m_1|x| + k > 0, \quad |x| > d_1,$$

因此，对任意的 $t \in R$, $|x| > d_1$，有 $g(t,x)x \geq 0$. 由定理 2 和定理 3 知结论成立. **证毕**

如果 $f(t,x) = f(x)$，则有如下定理.

定理 5 设 (H) 成立，且存在 $\eta > r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$, $a > 0$, $p \geq 1$，满足 $r_1 + 2^{p-1}T^p r_2 < \eta$ 和连续函数 $h : R \to R$，使得

4) $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{|h(x)|}{|x|^p} \leq r_1$ 且 $f(x) \geq \eta|x|^p + h(x)$, $\forall\, x \in R$;

5) $\limsup\limits_{x\to-\infty} \frac{|g(t,x)|}{|x|^p} \leq r_2$，对 $t \in R$ 一致成立，或者 $\limsup\limits_{x\to+\infty} \frac{|g(t,x)|}{|x|^p} \leq r_2$，对 $t \in R$ 一致成立;

6) $g(t,x)x \geq 0$, $|x| > a$, $\forall\, t \in R$;

则方程 (2) 至少有一个 T-反周期解.

证明 我们只证 $\limsup\limits_{x\to-\infty}\frac{|g(t,x)|}{|x|^p}\le r_2$ 的情形，另一情形类似可证．和定理2的证明一样，对 $\lambda\in(0,1]$，我们只需考虑方程系

$$x''(t)+\lambda f\big(x'(t)\big)+\lambda g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)-\lambda e(t)=x''(t)+\lambda A\big(t,x(t-\sigma(t)),x'(t)\big)=0, \tag{23}$$

并估计其解的先验界.

设 $x\in C_{2T}^{1,1}$ 为方程 (23) 的任意一个 T-反周期解，对 (23) 式两边在 $[0,2T]$ 上积分，有

$$\int_0^{2T} f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+\int_0^{2T} g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\,\mathrm{d}t=0. \tag{24}$$

令

$$E_4=\big\{t\in[0,2T]:|x'(t)|\le a\big\},\quad E_5=\big\{t\in[0,2T]:|x'(t)|>a\big\},$$

由条件 (4) 知

$$\eta\int_{E_5}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t\le\int_{E_5}f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t-\int_{E_5}h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t, \tag{25}$$

记

$$f_a=\max\big\{|f(x)|:|x|\le a\big\},\quad h_a=\max\big\{|h(x)|:|x|\le a\big\},\quad b=2Tf_a+2Th_a+2T\eta a^p,$$

则由

$$\eta\int_{E_4}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t-\int_{E_4}f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+\int_{E_4}h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t\le b,$$

知

$$\eta\int_{E_4}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t\le\int_{E_4}f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t-\int_{E_4}h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+b. \tag{26}$$

从而由式 (24)-(26) 导出

$$\begin{aligned}\eta\int_0^{2T}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t &\le \int_0^{2T}f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t-\int_0^{2T}h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+b\\ &\le \int_0^{2T}\big|g(t,x(t-\sigma(t)))\big|\,\mathrm{d}t-\int_0^{2T}h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+b.\end{aligned} \tag{27}$$

由条件 (4) 和 (5)，对 $\epsilon=\frac{\eta-r_1-2^{p-1}T^pr_2}{2^p+2}$，存在 $r>a$，使得

$$\frac{|g(t,x)|}{|x|^p}<r_2+\epsilon,\quad x<-r, \tag{28}$$

$$\frac{|h(x)|}{|x|^p}<r_1+\epsilon,\quad |x|>r. \tag{29}$$

令

$$E_6=\big\{t\in[0,2T]:x(t-\sigma(t))>r\big\},\quad E_7=\big\{t\in[0,2T]:|x(t-\sigma(t))|\le r\big\},$$

$$E_8=\big\{t\in[0,2T]:x(t-\sigma(t))<-r\big\},$$

由式 (24) 得

$$\int_{E_6\bigcup E_7\bigcup E_8} g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2T} g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{2T} f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t,$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_{E_6}\big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t &= \int_{E_6} g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_{E_7\bigcup E_8}\big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t-\int_0^{2T} f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

故由 (27) 式可导出

$$\begin{aligned}\eta\int_0^{2T}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t &\le 2\int_{E_7\bigcup E_8}\big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big|\,\mathrm{d}t-\int_0^{2T} f\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t-\int_0^{2T} h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+b\\ &\le 4Tg_r+4(r_1+\epsilon)T\|x\|_\infty^p-\eta\int_0^{2T}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t-2\int_0^{2T} h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+b,\end{aligned}$$

即

$$\eta\int_0^{2T}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t\le 2Tg_r+2(r_1+\epsilon)T\|x\|_\infty^p-\int_0^{2T} h\big(x'(t)\big)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}b,$$

其中 $g_r=\max\{|g(t,x)|:t\in[0,2T],|x|\le r\}$．令

$$E_9=\big\{t\in[0,2T]:|x'(t)|\le r\big\},\quad E_{10}=\big\{t\in[0,2T]:|x'(t)|>r\big\},$$

则由引理1可得

$$\begin{aligned}\eta\int_0^{2T}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t &\le 2Tg_r+2(r_1+\epsilon)T\|x\|_\infty^p+\int_{E_9}\big|h\big(x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+\int_{E_{10}}\big|h\big(x'(t)\big)\big|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}b\\ &\le 2Tg_r+2(r_1+\epsilon)T\|x\|_\infty^p+2Th_r+(r_1+\epsilon)\int_0^{2T}|x'(t)|^p\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}b\\ &\le 2Tg_r+(r_1+\epsilon)T\|x'\|_1^p+2Th_r+(r_1+\epsilon)\|x'\|_p^p+\frac{1}{2}b\\ &\le (r_1+\epsilon)\|x'\|_p^p+(r_1+\epsilon)T(2T)^{p-1}\|x'\|_p^p+2Tg_r+2Th_r+\frac{1}{2}b,\end{aligned}$$

故

$$\eta\|x'\|_p^p\le\big(r_1+\epsilon+2^{p-1}(T)^p(r_2+\epsilon)\big)\|x'\|_p^p+2Tg_r+2Th_r+\frac{1}{2}b,$$

其中 $h_r=\{|h(x)|:|x|\le r\}$．由于 $\eta-\big(r_1+\epsilon+2^{p-1}(T)^p(r_2+\epsilon)\big)>0$，所以存在 $M_9>0$，使得 $\|x'\|_p\le M_9$．从而可得

$$\|x'\|_1\le(2T)^{\frac{p-1}{p}}\|x'\|_p\le(2T)^{\frac{p-1}{p}}M_9.$$

由引理1知

$$\|x\|_\infty\le\frac{1}{2}(2T)^{\frac{p-1}{p}}M_9=M_{10}.$$

为了估计 $\|x'\|_\infty$ 的界，在方程系 (23) 两边同时乘以 $x''(t)$，然后在 $[0,2T]$ 上积分得

$$\begin{aligned}\|x''\|_2^2 &\le \int_0^{2T} \big|g\big(t,x(t-\sigma(t))\big)\big||x''(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^{2T}\big|e(t)|x''(t)|\big|\,\mathrm{d}t\\ &\le \sqrt{2T}g_{M_{10}}\|x''\|_2+\|e\|_2\|x''\|_2,\end{aligned}$$

其中 $g_{M_{10}}=\max\{|g(t,x)|:t\in[0,2T],|x|\le M_{10}\}$. 因而可得

$$\|x''\|_2\le\sqrt{2T}g_{M_{10}}+\|e\|_2,\quad \|x''\|_1\le\sqrt{2T}\|x''\|_2\le 2Tg_{M_{10}}+\sqrt{2T}\|e\|_2,$$

所以我们有

$$\|x'\|_\infty\le\|x''\|_1\le 2Tg_{M_{10}}+\sqrt{2T}\|e\|_2=M_{11}.$$

综上所述，$\|x\|\le\max\{M_{10},M_{11}\}$，和定理2的证明一样，可得该结论成立. **证毕**

下面给出两个例子说明本文所得结果的有效性.

例1 考虑下面的时滞Rayleigh方程

$$x''(t)+\frac{1}{512\pi}\sin(2t)x'(t)+\frac{1}{32\pi^2}(\cos 2t+2)x\Big(t-\frac{1}{2}\sin(2t+1)\Big)=\sin t,\tag{30}$$

由于

$$f(t,x)=\frac{1}{512\pi}\sin(2t)x,\quad g(t,x)=\frac{1}{32\pi^2}(\cos 2t+2)x,$$

$$\sigma(t)=\frac{1}{2}\sin(2t+1),\quad e(t)=\sin t,\quad T=\pi,$$

易验证定理2的条件 (H), 1), 2) 和 3) 都满足，由定理2知：方程 (30) 至少有一个 T-反周期解.

例2 考虑如下时滞Rayleigh方程

$$x''(t)+2\big(x'(t)\big)^3+x'(t)+(\sin 2t+3)x(t-\cos 2t)=\frac{1}{3}\sin t,\tag{31}$$

因为

$$f(x)=2x^3+x,\quad h(x)=-2|x|^4+2x^3+x,$$

$$g(t,x)=(\sin 2t+3)x,\quad \sigma(t)=\cos 2t,\quad e(t)=\frac{1}{3}\sin t,$$

且 $T=\pi$, $p=4$，所以定理5的条件满足，由定理5知：方程 (31) 至少有一个 T-反周期解.

参考文献：

[1] Chen T, Liu W, Zhang J, *et al*. The existence of anti-periodic solutions for Liénard equations[J]. Journal of Mathematical Study, 2007, 40: 187-195

[2] Aftabizadeh A R, Aizicovici S, Pavel N H. On a class of second-order anti-periodic boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 171: 301-320

[3] Chen Y, Nieto J J, Oregan D. Anti-periodic solutions for fully nonlinear first-order differential equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2007, 46: 1183-1190

[4] Aizicovici S, McKibben M, Reich S. Anti-periodic solutions to nonmonotone evolution equations with discontinuous nonlinearities[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 43: 233-251

[5] Du J Y, Han H L, Jin G X. On trigonometric and paratrigonometric Hermite interpolation[J]. Journal of Approximation Theory, 2004, 131: 74-99

[6] Chen H L. Antiperiodic wavelets[J]. Journal of Computational Mathematics, 1996, 14: 32-39

[7] Djiakov P, Mityagin B. Spectral gaps of the periodic Schrödinger operator when its potential is an entire function[J]. Advances in Applied Mathematics, 2003, 31: 562-596

[8] Djiakov P, Mityagin B. Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two-term potential[J]. Journal of Approximation Theory, 2005, 135: 70-104

[9] Wang W B, Shen J H. Existence of solutions for anti-periodic boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 598-605

[10] Kleinert H, Chervyakov A. Functional determinants from Wronski Green function[J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 40: 6044-6051

[11] Wang Y, Shi Y M. Eigenvalues of second-order difference equations with periodic and antiperiodic boundary conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 309: 56-69

[12] Liu B W. Anti-periodic solutions for forced Rayleigh-type equations[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(5): 2850-2856

[13] Hale J K. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977

[14] Gaines R E, Mawhin J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1977

Anti-periodic Solutions for Rayleigh Equations with Delay

ZHOU Jian-wen, LI Yong-kun, WANG Yan-ning

(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091)

Abstract: In this paper, we study the existence of anti-periodic solutions for a kind of Rayleigh equations with delay by using the fixed theorem of the Leray-Schauder degree theory. We obtain sufficient conditions for the existence of anti-periodic solutions. Finally, two examples are presented to illustrate the feasibility and effectiveness of the sufficient conditions.

Keywords: Rayleigh equation; delay; anti-periodic solutions; Leray-Schauder degree

Received: 31 Dec 2008. **Accepted:** 20 Jan 2010.

Foundation item: The Third Batch "Training Plan for Key Young Teachers" of Yunnan University (21132014).